

$$\int f(x) dx$$

数量与比例

number line / fraction magnitude

$$\sum n(n+1)/2$$



$$3/8 < 5/11 < 7/13$$

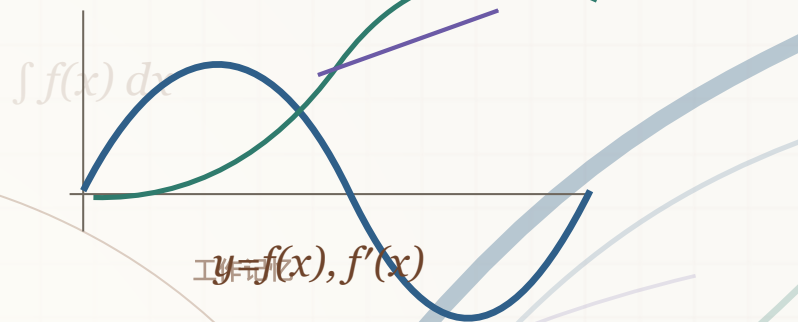
算术自动化

函数变化

函数图像

slope, tangent, rate of change

$$f'(x) = \lim \Delta y / \Delta x$$



几何结构

shape, relation, proof

数量表征

$$a^2 + b^2 = c^2$$



$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

A3 PRINT EDITION · MATHEMATICAL COGNITION PROFILE

数学核心能力
多维评估报告

示例 S001 · 匿名样例学生

评估日期 — 20XX 年 X 月 X 日

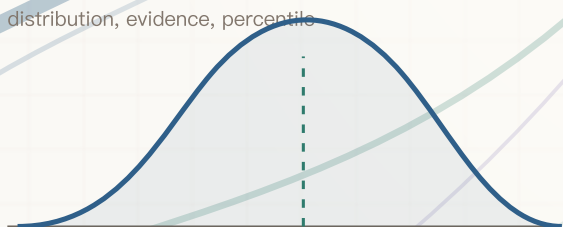
数学焦虑

抑制控制

分数整体

概率与常模

distribution, evidence, percentile



$$N(\mu, \sigma^2) \cdot \text{percentile}$$

代数结构

symbolic transformation as objects

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$$A \cdot x = b$$

多步运算与执行控制

hold, update, suppress, continue

$$18 \rightarrow -7 \rightarrow \times 3 \rightarrow +9$$

左右左

$$\sum \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x \rightarrow \Delta y / \Delta x = f'(x)$$

$$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$$

$$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$$

年龄性别

示例年龄 · 示例性别

示例利手 · 示例身高 · 示例体重

实验信息

测评员：示例人员

评估场次：第一次

本报告依据 PsychoPy 单文件认知评估系统 v2.5 实施测验所得原始数据撰写。
全部原始数据已四重导出 (JSONL / CSV / XML / XLSX)，存档于受试者目录下。

数据质量

测试时长 31 分钟

409 条试次 / 446 条记录

评估系统

认知评估系统 v2.6

完成模块 10 / 11

报告导航

一、受试背景与测试质量	第 3 页
二、理论框架与方法	第 4 页
三、行政摘要与能力剖面	第 5 页
四、维度一 符号数量表征	第 6 页
五、维度二 算术事实流畅性	第 7 页
六、维度三 言语工作记忆	第 8 页
七、维度四 链式心算（多步运算整合）	第 9 页
八、维度五 抑制控制	第 11 页
九、维度六 关系语义与反向推理	第 12 页
十、维度七 分数概念整体表征	第 13 页
十一、调节变量 数学焦虑	第 15 页
十二、生活方式调查 IPAQ 体力活动与认知	第 16 页
十三、综合解读与高中数学衔接	第 18 页
十四、干预建议	第 20 页
十五、附录 原始数据细览	第 22 页
十六、参考文献	第 23 页

一、受试背景与测试质量

1.1 受试基本信息

项目	数值
受试编号与姓名	编号 S 0 0 1，姓名 示例学生
年龄、性别、利手	示例年龄；示例性别；示例利手
身高、体重、体质指数	示例身高；示例体重；体质指数为演示值
知情同意完成时刻	2 0 × × 年 × 月 × 日 × × : × × : × ×
实验员、场次	示例测评员；示例场次

1.2 测试数据质量

409	446	27	0
原始试次条数	总记录条数	数据表数量	写盘失败次数

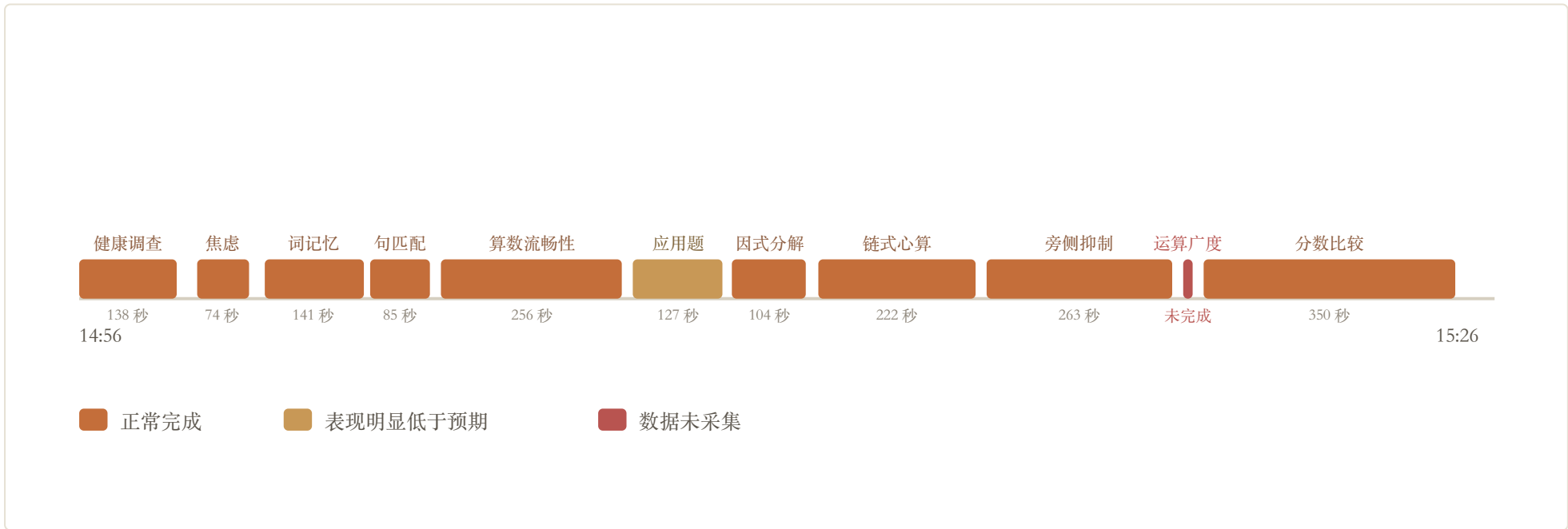
本次评估的原始数据通过四种独立格式同步落盘：逐试次追加写入的 JSONL 流、按表分组的 CSV 快照、Excel 兼容的 XML 工作簿，以及 openpyxl 生成的 XLSX 文件。四种格式之间存在严格的字段一致性，且本次落盘环节零失败。

本次评估覆盖 11 个模块中的 10 个。第 9 个模块「运算广度」由于评估软件版本兼容性原因未能采集到有效数据；其余 10 个模块的全部数据完整记录并通过四种格式同步落盘。工作记忆容量维度因此在本次评估中由「简版阅读记忆」与「链式心算」两项间接证据共同推断，建议在后续复测中补充直接测量。

1.3 设备与系统参数

项目	数值
操作系统	macOS 25.4.0（基于 Darwin 内核）
评估软件	PsychoPy 2026.1.3
评估脚本	认知评估系统 v2.5（Mac 与 Windows 跨平台单文件版本）
屏幕分辨率	3456 × 2234
屏幕刷新率	119.9 赫兹
渲染后端	pyglet 全屏
中文字体	Hiragino Sans GB
暂停次数	零次

1.4 各模块完成时间线



图一 十一个模块的实际耗时与状态。算数流畅性、旁侧抑制、链式心算、分数比较为耗时最长的四个模块。

二、理论框架与方法

2.1 总体取向

本评估关注被试在七类相互关联但可分离的数学认知成分上的行为表现：基础数量表征、算术事实的快速提取、言语工作记忆、多步运算的整合能力、抑制控制、关系与反向语义推理、对数学量的整体表征，以及作为调节变量的数学焦虑。每一成分均挑选具有大样本元分析支持的行为范式作为探针，最终位次估计依据已发表的常模分布外推。

本评估的取向是行为层面的量化诊断。报告中所有判定均建立于被试在标准化任务上的实测表现与同龄常模分布的对照之上。报告中提及的脑区或神经通路（如顶内沟、左角回、左前额叶等）仅作为对行为表现的可能神经基础进行说明，本次评估并未进行任何脑功能或脑结构的直接测量，因此关于神经层面的论述均为推断性表述，不构成针对个体的神经诊断。

若后续需要从神经层面进一步定位该被试的认知瓶颈，可考虑配合高密度脑电（high-density EEG）进行扩展评估。在数学相关任务（如分数比较、链式心算）执行时同步采集脑电数据，并通过事件相关电位（ERP）分析能够定位：（一）顶区数量加工成分（P3p、N2 距离效应）的振幅与潜伏期，对应数感与符号数量表征的成熟度；（二）额区中央执行成分（N2、P3a）的调制，对应工作记忆维持与冲突监控的效率；（三）前额-顶叶网络的相位耦合，对应多步运算中的脑网络协调效率。结合行为-脑电的双层数据，可以将本报告中以行为推断的脑机制定位从假设性陈述升级为可观察的客观指标。

2.2 本次评估的八个测评维度

结合已有大样本与元分析证据，本次评估将十个完成模块整合为八个具有可解释意义的维度（含一个调节变量）。每个维度都建立在不少于一项大样本研究或元分析的支持上，常模分布据此推断。

层级	认知成分	本评估对应模块	常模来源（样本量）
一阶	符号数量表征	整数大小比较	符号大小比较元分析 45 项研究, 17,201 人
一阶	算术事实提取	四则运算流畅性、因式分解	算术流畅性二至三年级纵向追踪 244 人
二阶	言语工作记忆	简版阅读记忆、链式心算	工作记忆与数学元分析 110 项研究、829 个效应量
二阶	抑制控制	旁侧抑制、简版阅读抑制	执行功能与学业元分析 65,605 名学生
语义	关系反向推理	应用题	不一致-一致性效应眼动研究 常模化样本（成功组与不成功组对照）
整体表征	分数概念	分数大小比较	分数大小比较专家与学生对照 134 人
调节	数学焦虑	数学 / 语文焦虑量表	中国青少年数学焦虑量表常模 3,000 余名学生

2.3 测量学要点

- 所有计时模块均通过 PsychoPy 的高精度计时器记录反应时，毫秒级精度，在120赫兹屏幕上的呈现时序由 pyglet 全屏渲染保证。
- 反应时低于150 毫秒的试次被标记为预测性反应（Anticipatory），不进入正确反应时的统计平均。
- 反应时高于该模块最大允许时间的试次被标记为超时（Timeout），同样不进入正确反应时的统计平均。
- 本次评估中所有有效模块的预测性反应与超时数均为零，所有反应均落入有效区间，数据质量优良。
- 对于工作记忆类任务（简版阅读记忆与运算广度），处理段准确率应不低于85%，方能保证存储段数据的可靠性。这一阈值源自工作记忆研究的方法学惯例。

三、行政摘要与能力剖面

3.1 三色概览

显著优势

- 四则运算事实流畅性接近上限（加法 100%、减法 100%、乘法 91%、除法 93%）。
- 旁侧抑制任务一致性效应 71 毫秒，处于青少年典型区间，反应级抑制功能完整。
- 因式分解中等难度与困难难度准确率均为100%，乘法分解能力扎实。
- 整数大小比较准确率91.7%，平均反应时低于1 秒，符号化基础数量加工功能正常。

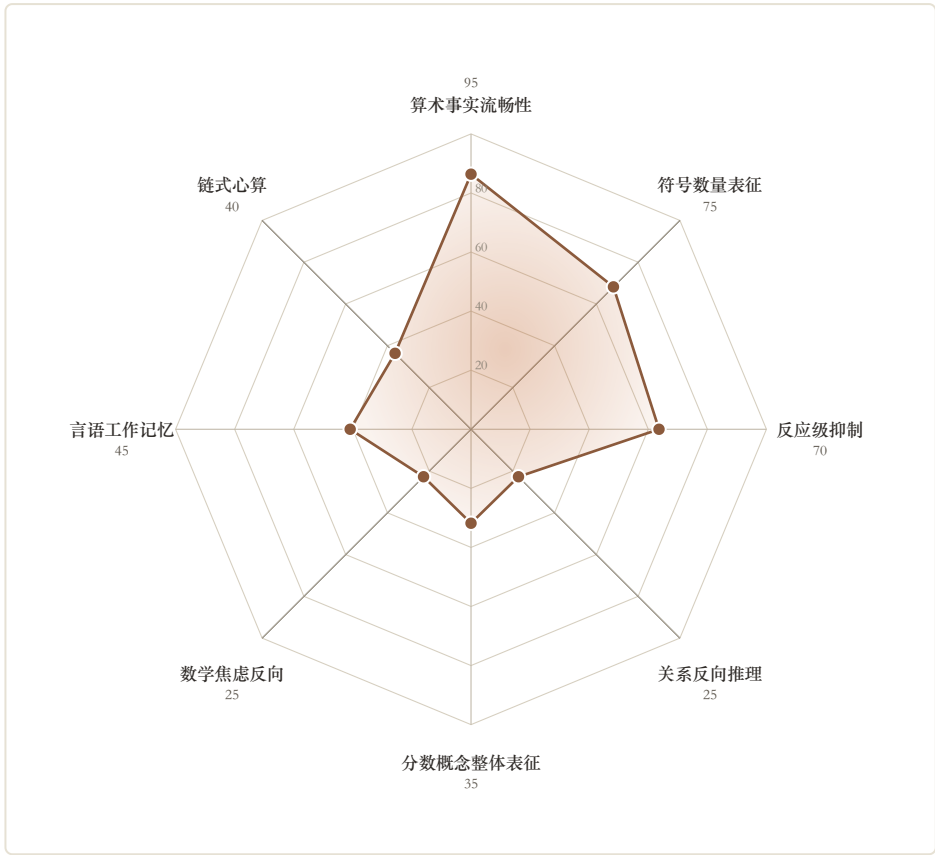
中等关注

- 言语工作记忆处理段准确率 80%，提示在双任务并行情境下的稳定性有所下降。
- 链式心算高级段（四到五步、混合运算）准确率仅50%，多步保持能力受限。
- 语义级干扰抑制条件准确率75%，与目标条件相比存在25 个百分点的抑制代价，但样本量较小。
- 运算广度数据缺失，工作记忆容量需在补测中获得直接定量。

重点关注

- 应用题准确率37.5%，全部错题均落在反向语义陷阱情境中，错题模式高度同质。
- 分数比较中无公分量近距离条件准确率36.4%，跌破机会水平，提示分数整体表征不稳定。
- 数学评价焦虑分数 3.0（满分 4 分），属于评价情境特异性高焦虑状态。

3.2 八维度剖面图



图二 八维度能力剖面，每个维度归一化至 0 至 100 区间。焦虑维度采用反向编码，分数越低代表焦虑越高。剖面整体呈现明显的不对称分布：算术事实流畅性接近上限，符号数量表征与反应级抑制处于常模均值附近，言语工作记忆与链式心算位于均值之下，关系反向推理、分数概念整体表征与数学焦虑反向三者落入低分区。

维度一 符号数量表征

1.1 概念界定

符号数量表征指对阿拉伯数字、汉字数词等符号化数量的内在大小处理能力。其神经基础为双侧顶内沟所持有的跨符号抽象量级编码：无论数量以阿拉伯数字、词形数字还是点阵呈现，顶内沟均能在该量级附近产生距离依赖的激活模式。这一通路是后续所有数量运算与比较的底层基础。

1.2 本次测量与原始作答

在分数比较模块开始之前，被试先完成了一组12道整数大小比较作答，每题呈现两个不重复的个位数字（例如3与4，1与8），按F或J键选择更大者，最大允许时间为5秒。

12

总试次

11

答对数

91.7%

准确率

939 ms

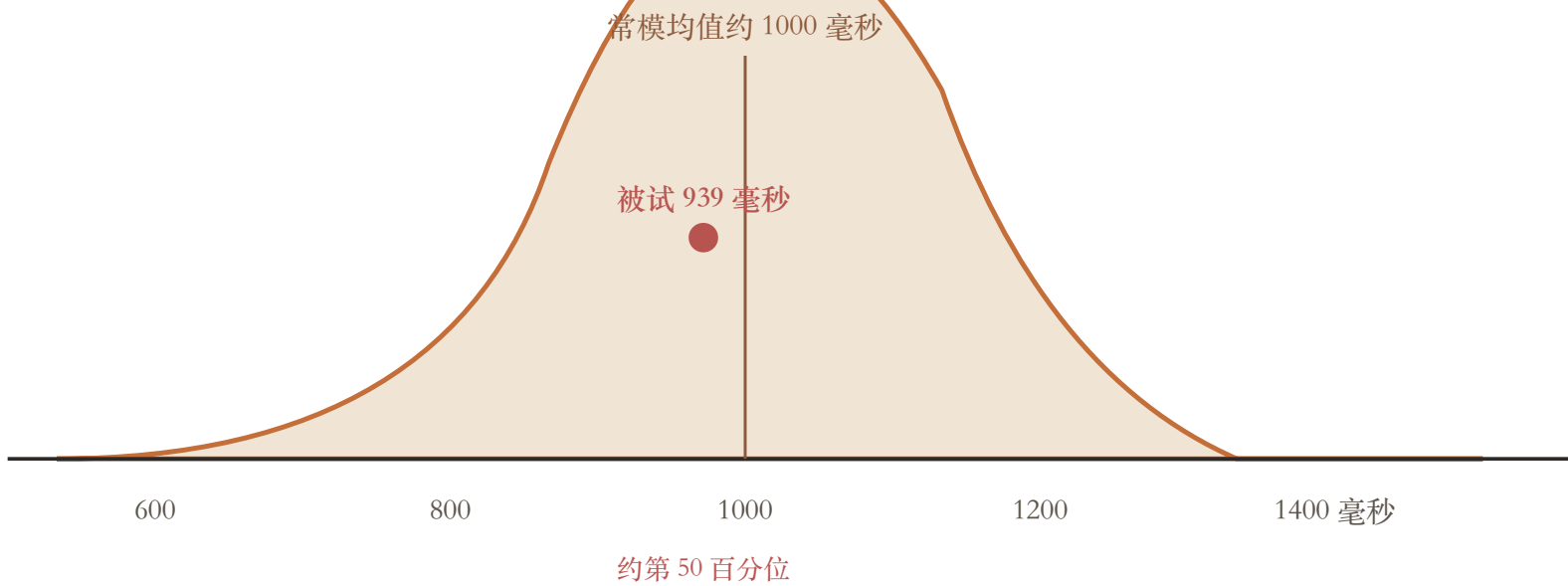
平均反应时

1.3 常模对比

依据符号数量比较元分析整合的17,000余人数据所建立的常模分布，13-14岁青少年整数大小比较的均值约为1000毫秒，标准差约200毫秒，准确率天花板效应明显。该被试的反应时位于常模分布的均值附近，对应大约第50百分位水平。

符号数量比较反应时常模分布定位

被试整数比较反应时939毫秒，对应位置以红色标



图三 整数大小比较反应时与常模分布的对应位置。横轴为反应时（毫秒），纵轴为概率密度（示意）。

维度一判定：符号化基础数量加工功能正常

整数大小比较达到接近天花板的准确率与同龄均值附近的反应时，提示被试顶内沟持有的抽象量级编码功能完整。该结论作为后续维度六（分数整体表征薄弱）的必要排除项：在符号化基础数量加工通路完整的前提下，分数比较场景中的失败定位于对分数作为整体数值的表征环节，而非大小比较任务本身。

高考衔接 符号数量表征在中学数学中的具体落点

该维度对应的高中知识点主要涉及：

- 实数大小比较与不等式**：含参不等式中需要对不同表达式的取值范围进行快速估算，例如比较 a^2 与 a ，比较 1 除以 a 与 a ，比较根号下的表达式与有理数。
- 函数取值的快速估算**：在函数图象题与导数题中，常需要估算极值附近的函数值，例如比较 $\ln 2$ 与 0.7 的大小，比较 e 的 0.5 次方与 1.65 的大小。
- 数轴定位**：解集表达、区间运算、不等式组求解时需要在数轴上准确放置临界点。

该被试在这一维度功能正常，意味着上述高考考点的基础认知通路无明显障碍。

维度二 算术事实流畅性

2.1 概念界定

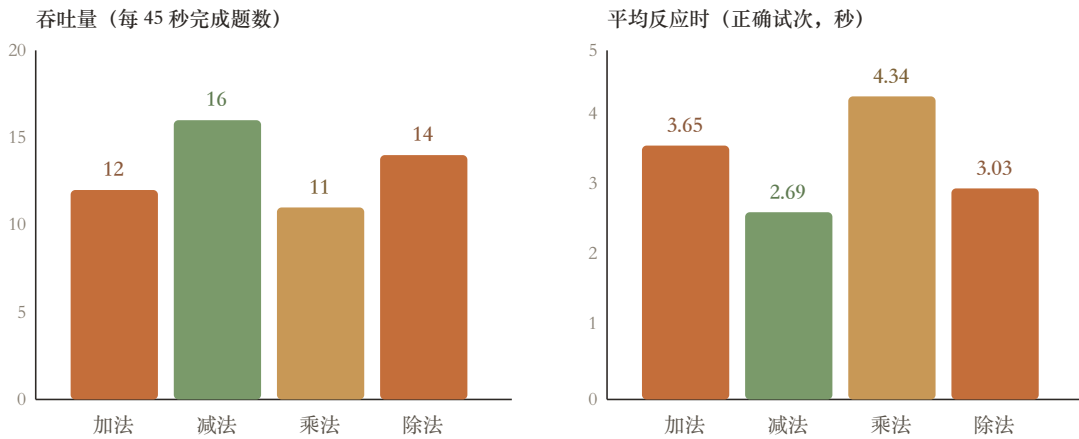
算术事实流畅性指对 9×9 乘法表范围内加减乘除事实的快速提取能力。其神经基础涉及左角回与左颞顶联合区的言语事实表征系统：成熟解题者在面对例如 7×8 这一刺激时，并不重新进行计算，而是直接从长时记忆中提取「56」这一存储结果。该能力的发展自小学起，在中学阶段逐步达到自动化。

大样本纵向追踪研究表明，符号数量加工是算术事实习得的独特预测因子，且抑制控制并不直接预测事实提取的速度。二至三年级阶段的算术流畅性追踪显示，减法流畅性是预测三年级乘法与应用题成绩最强的单一指标。

2.2 本次测量与原始作答

四则运算流畅性模块采用45秒分块计时设计，被试在每个分块内尽可能多地完成单一运算类型的题目，答对自动跳到下一题，答错红色闪烁后清空重输。

四则运算流畅性



加法12题全对；减法16题全对；乘法11题对10题；除法14题对13题。
减法在吞吐量与反应时两项指标上均最优，对应文献所述的关键预测维度。

图四 四则运算流畅性。左侧为45秒内完成的题目数量，右侧为正确试次的平均反应时。

2.3 常模对比

将该被试的减法成绩（每题 2.7 秒、准确率100%）放入二至三年级流畅性纵向追踪的常模分布（每题约三点零正负零点八秒，准确率约 85 ± 10 个百分点）外推到中学阶段，该被试位于第 75 至第 80 百分位之间，明显高于其年级中位水平。乘法（每题 4.3 秒、准确率91）相对而言是四个分块中较弱的一块，但仍位于常模均值之上。

2.4 因式分解补充证据

因式分解作为另一种乘法事实与乘法分解能力的探针：

难度	题数	准确率	平均反应时（正确试次）
简单（积小于等于二十八）	4	75%	3.39 秒
中等（积 36 – 54）	4	100%	九点61 秒
困难（积 56 – 81）	4	100%	7.90 秒
合计	12	91.7%	7.29 秒

简单段反而失分一题、中等与困难段全对，且中等与困难段反应时为简单段的二至三倍，呈现注意力进入任务初期未充分聚焦的特征。这与因式分解能力本身无关，乘法事实的存储与分解链条基本完整。

维度二判定：算术事实流畅性属显著优势，约第 75 至第 80 百分位

该维度的常模化定位有助于后续应用题低准确率的归因解释——在基础运算能力达到接近上限水平的前提下，应用题的错误归因被定位至语义建模层面。

高考衔接 算术事实流畅性在中学数学中的具体落点

- 计算密集题：方程组、因式分解、解析几何参数代入、导数求解都依赖连续基础运算。
- 时间分配：高考 120 分钟内完成 22 题，基础运算越自动化，越能给综合题保留工作记忆和时间。

该被试在这一维度上的优势可视为中学计算密集型题目的支撑资源，应继续保持。

维度三 言语工作记忆

3.1 概念界定

工作记忆是数学学习的二阶天花板——即便一阶的算术事实与符号数量加工能力充足，多步推理、应用题理解、代数化简等高阶任务仍需中央执行系统将信息暂存并动态更新。言语工作记忆主要涉及左前额叶背外侧区与左侧顶下小叶组成的语音环路，加上前额叶背外侧承担的中央执行成分。

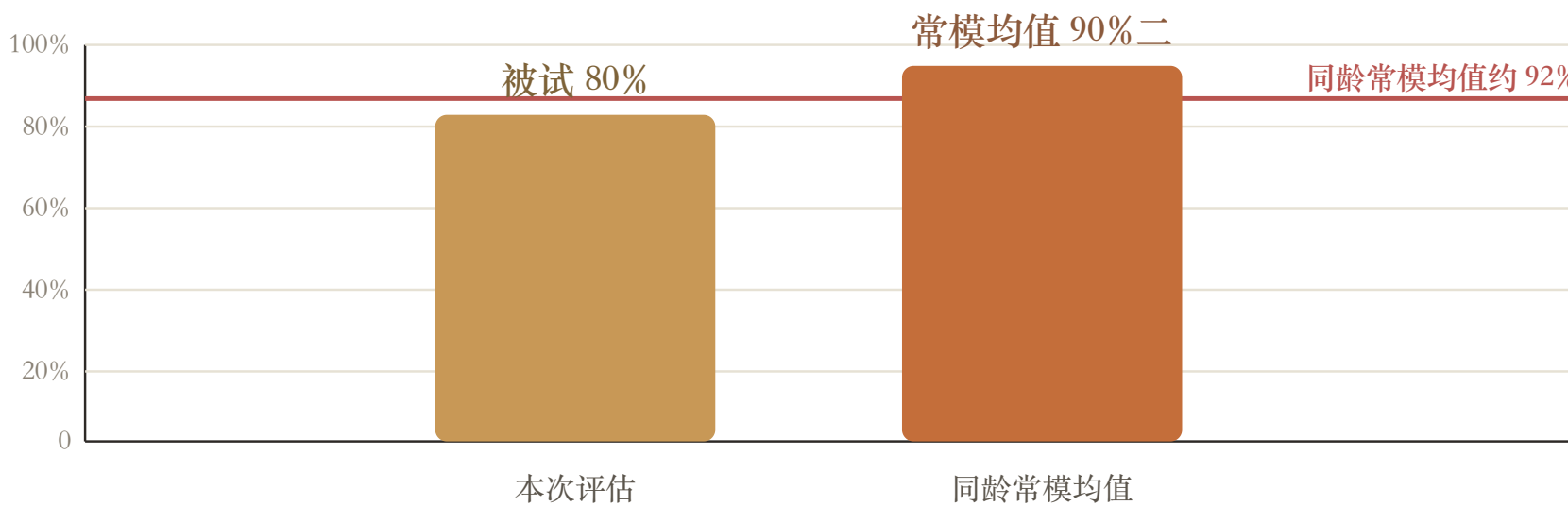
大样本元分析综合110项研究、829个效应量后报告：工作记忆与数学成绩的总体相关约为0.35。在小学阶段，言语工作记忆是与数学相关最强的子成分；在加减运算上的相关强于乘除运算。这意味着工作记忆容量是中学阶段需要重点关注的二阶认知瓶颈。

3.2 本次测量一：简版阅读记忆

简版阅读记忆范式要求被试先判断一句短句是否合理（处理任务），随后记忆一个词（存储任务），一组2-3句后回忆出现过的词。共4组、10次句子判断、4次词汇回忆。

80%	3352 毫秒	25%	1.75
处理段准确率	平均反应时	回忆精确正确率	平均命中数

简版阅读记忆处理段准确率与同龄常模对照



图五 处理段准确率与同龄常模均值对照。该被试 80% 位于常模均值下方约 12 个百分点，提示在双任务并行情境下的句意处理稳定性有所下降。

四个组的回忆作答中仅有第四组完全正确，其余三组各含一个虚报错误，提示工作记忆负荷条件下的来源监控较弱。

3.3 常模对比

简版阅读记忆的处理段准确率为 80%，未达 85% 阈值；回忆段精确正确率 25%。两项指标合并，并参考工作记忆—数学元分析（Peng 等 2016，110 项研究、829 个效应量）的常模分布外推，该被试在言语工作记忆维度大约处于同龄常模的第 25 至第 30 百分位。运算广度模块的数据补齐后能进一步收窄该位次的置信区间。维度四（链式心算）作为对工作记忆容量的复合行为指标，将在下一章给出更为直接的数据证据。

维度三判定：言语工作记忆位于常模均值之下，约第 25 至第 30 百分位

这一维度构成该被试当前的二阶认知瓶颈。在所有需要多步保持的数学情境（含多步应用题、代数化简、分数运算、几何推理）中，工作记忆容量的限制会反复显现。运算广度模块在 v2.6 中补测后可将本判定从间接证据升级为直接定量。

高考衔接 言语工作记忆在中学数学中的具体落点

- 三角函数恒等变形**：例如证明 $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ ，需要同时保持「目标式形态」「已知公式」「中间代换结果」三层信息。工作记忆容量限制直接表现为变形过程中漏项或代错。
- 立体几何辅助线证明**：需要在脑中保持三维结构、辅助线位置与已用条件三者协同。
- 数列归纳与递推**：例如已知数列递推关系求通项公式时，需要在多步演算中持续保持「上一步结论」与「目标形式」的对照。
- 概率多步计算**：条件概率与全概率公式应用题往往涉及多个事件的层级嵌套，需要在脑中维持事件树的层次关系。
- 解析几何参数题**：椭圆与抛物线综合题通常要求联立方程后保持「韦达定理结果」「目标式」「条件式」三层信息同时运转。

该被试在中学阶段的应对策略应当包括：在多步推理过程中借助纸笔外化中间结果，避免长时间将信息保持在脑中；通过反复练习将常用变形过程组块化（例如把「2 倍角公式 → 半角公式」的转换链条整合为单一步骤），减轻工作记忆负担。

维度四 链式心算（多步运算的整合能力）

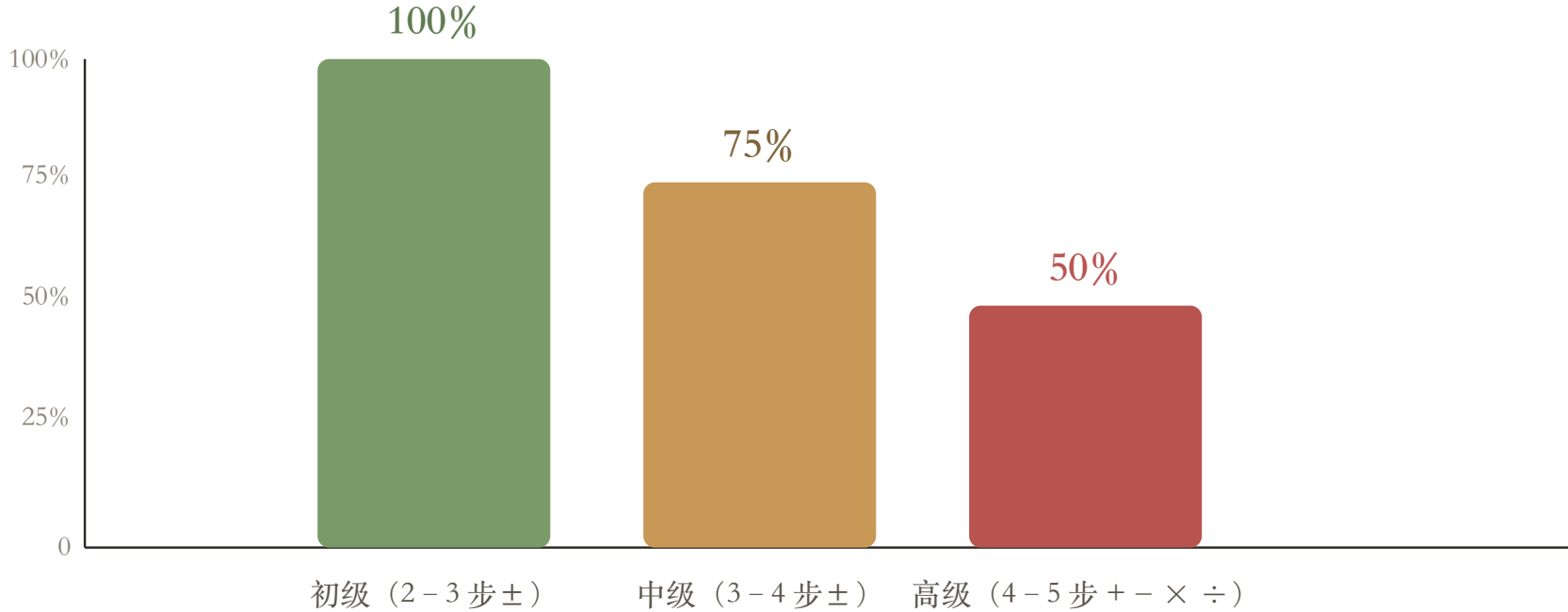
4.1 为什么链式心算比基础算术流畅性更具诊断意义

本评估将链式心算独立为一项核心维度，而不将其归入工作记忆或算术流畅性的子项之下，理由如下：算术流畅性（维度二）测的是对单步事实的提取能力——「 $7 \times 8 = 56$ 」这类一步即得的回忆。这种能力一旦自动化便相对稳定，在被试身上已接近上限。但绝大多数真实数学情境并非单步：高中数学综合题、应用题、压轴题，无一例外要求被试完成一连串相互依存的运算与决策。链式心算（多步运算整合）正是对这一真实数学情境的最小化、可量化的实验探针。这项能力同时考察四种内部机制的协同：（一）对每一步的运算事实提取速度（与维度二相关），（二）对中间结果的工作记忆维持（与维度三相关），（三）对运算顺序的序列规划，（四）对已经完成步骤的抑制——避免上一步结果干扰下一步运算。任何一项失败都会导致整道题失分。因此链式心算的成绩是中央执行系统在真实数学情境下的综合压力指标，是中学与高考阶段数学表现最直接的行为预测因子之一。

4.2 本次测量与原始作答

链式心算模块共 12 题，分为初级、中级、高级三个难度等级，各 4 题。被试需要在脑中持续维持一个起始数值，每一步根据屏幕呈现的运算符与操作数更新中间结果，直至全部步骤完成后输入最终答案。

链式心算 随步数与运算复杂度上升的阶梯下降



图七 链式心算准确率随步数与运算类型复杂度上升而呈现接近线性的阶梯下降，每升一级丢失约 25 个百分点。

这条阶梯下降具有非常清晰的认知学含义：被试在 2 至 3 步纯加减情境下整合无误（中央执行尚有余裕），3 至 4 步纯加减情境下开始失分（接近容量边缘），4 至 5 步且混合四则运算的情境下错失一半（超出容量）。换言之，被试当前的多步运算整合容量上限位于 3 至 4 步纯加减区间。任何超过该容量的数学情境（高中数学几乎所有综合题都超过该容量），都将表现为系统性失分。

4.3 链式心算与应用题解题的对应关系

链式心算与应用题解题在认知结构上高度同构。一道典型的应用题解题过程包含以下序列：（一）阅读并理解题面 $\Rightarrow$ （二）从题面中提取已知量与目标量 $\Rightarrow$ （三）识别量与量之间的关系 $\Rightarrow$ （四）建立计算路径 $\Rightarrow$ （五）逐步执行计算 $\Rightarrow$ （六）将最终结果与题目目标对应。该被试在维度五（关系反向推理）的 37.5% 准确率主要由步骤（三）（四）的语义建模困难造成，而即便步骤（三）（四）顺利完成，步骤（五）的逐步执行也需要链式心算所测试的多步运算整合能力。

具体到本次评估的数据：该被试在应用题模块上的 6 道答对题全部位于「直接情境」，意味着步骤（五）只需 1 至 2 步运算即可完成；这些题目恰好处于其链式心算初级（100% 准确）的能力范围。而 10 道答错题中除了语义反向的原因之外，部分题目还涉及多步计算的并行——例如「12 是白球的 3 倍，白球有多少」一题，被试不仅需要识别反向关系，还需要在脑中同时保持「12」「3」「除法」「目标量为白球」四项信息。链式心算能力的限制使得这种「语义 + 多步运算」的复合负荷更难被被试承担。

4.4 链式心算与日常数学学习的对应关系

链式心算的能力局限在日常数学学习中将表现为以下具体场景：

- 课堂跟随能力：**当老师在黑板上演示一道五步推导时（例如「证明 $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ 」），被试需要在脑中保持「目标式」「上一步结果」「下一步要做的代换」三层信息。链式高级段 50% 的表现意味着被试在跟随老师的演示时大约一半的时间会丢失某一中间项，需要回到上一步重新建立。
- 例题理解：**阅读教材或参考书上的多步例题时，每读一行需将该行结果整合进既有的「解题路径」。被试当前的整合容量限制使其更容易在长例题上理解中断，表现为「看着会，自己做就忘」。
- 家庭作业完成质量：**一道五步综合题中，若任一中间步骤的中间结果丢失，整道题失分。链式心算高级 50% 的表现预示其在五步以上综合题上的平均得分约为基础题的一半，且失分呈现「跳步式」错误（前几步对、中间某步丢失、后续连锁错误）。
- 口算与心算情境：**日常生活中的多步心算（例如计算购物折扣后再加税）也会受这一容量限制影响。该被试可能在面对此类生活情境时主动避免，转而依赖纸笔或计算器。
- 考试时间分配：**综合题往往需要在 5 至 8 分钟内完成 5 至 7 步推导。链式心算容量不足意味着被试需要更频繁地停下来核对上一步，时间消耗高于同龄常模，进而压缩压轴题作答时间。

4.5 常模对比与判定

本评估对照工作记忆—数学元分析（Peng 等 2016）所报告的常模分布外推，14 岁年龄段在 4 至 5 步混合四则运算心算上的典型准确率为 65% 至 80%。该被试 50% 的高级段准确率位于同龄常模的第 20 至第 25 百分位区间，明显低于年级中位。结合 Namkung 等 2019 的研究——「难度更高的数学任务受焦虑破坏的程度更大」——该被试在面对高强度多步运算时的实际表现可能比训练状态下的 50% 进一步下降。

维度四判定：多步运算整合能力位于常模均值之下，约第 20 至第 25 百分位

这一维度具有本评估中最强的高考预测力。由于高考数学几乎所有综合题与压轴题都要求 4 步以上的运算整合，被试当前的容量限制会在这类题型上表现为系统性低分。建议将链式心算训练列为干预方案的核心组成（详见第十三章），通过逐步增加链长 + 言语外化 + 纸笔辅助三种方法系统提升。

高考衔接 多步运算整合能力在高考数学中的具体落点

下列高考题型对多步运算整合能力的需求接近或超过被试当前容量上限：

- 三角函数综合题**（典型 5–7 步）：从已知三角恒等式出发，经过和差化积、二倍角、辅助角公式等多次替换得到目标结论。
- 立体几何证明与计算题**（典型 6–8 步）：建立空间坐标系、写向量、求法向量、计算夹角、化简结果。
- 解析几何综合题**（典型 6–10 步）：联立方程、应用韦达定理、代入条件、化简、讨论参数范围。这是高考数学最长的解题链。
- 导数综合题**（典型 5–8 步）：求导、解方程、列符号表、分类讨论、求极值、比较端点。
- 数列归纳与递推**（典型 4–6 步）：写出前几项、找规律、设猜想、用数学归纳法或方程法证明。
- 概率统计综合题**（典型 4–6 步）：理解随机变量结构、计算分布列、求期望或方差、比较结论。

上述六类题型构成高考数学第 17 题至第 22 题（解答题部分）的主体，分值占全卷的约 60%。被试当前的链式心算容量限制将在这一分值段表现为系统性失分。提升链式心算容量不是「附加训练」，而是覆盖最高分值段的核心能力建设。

维度五 抑制控制

5.1 概念界定

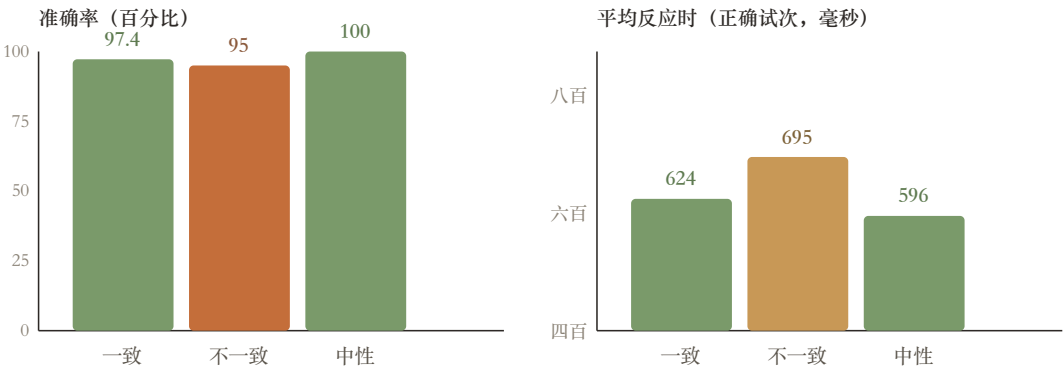
抑制控制分为两个子成分：反应级抑制（在多个候选反应中压制冲动选择）与干扰抑制（在多个语义或感知线索中过滤无关信息）。前者主要涉及右下额回与前扣带皮层；后者主要涉及左前额叶与顶上小叶。大样本元分析数据显示，干扰抑制与数学能力的相关（约0.21）显著强于反应级抑制（约0.14）。

5.2 反应级抑制：旁侧抑制任务

旁侧抑制任务呈现五个箭头，被试须判断中央箭头的指向并按对应方向键作答。三种条件：

- 一致条件：旁侧箭头与中央箭头方向相同（例如「>>>>>」）。
- 不一致条件：旁侧箭头与中央箭头方向相反（例如「>><<>>」），需要抑制旁侧线索。
- 中性条件：旁侧不含方向信息（例如「——>——」），不构成干扰。

旁侧抑制三条件准确率与反应时



正式段 120 题，有效试次 116 条，预测性反应 0 条，超时 0 条。

一致性效应（不一致减去一致的反应时差）为 71 毫秒，处于青少年常模 50 – 100 毫秒区间内。

图七 旁侧抑制任务三条件的准确率与平均反应时。一致性效应等于不一致条件减去一致条件的反应时差。

5.3 语义级干扰抑制：简版阅读抑制

简版阅读抑制范式呈现「杯子里装的是水，不是牛奶」这一类句子，随后呈现一个探词，要求被试判断探词是否符合句子的最终意思。三种条件：

条件	试次数	准确率	平均反应时	解读
目标词条件	4	100%	1441 毫秒	探词为「水」，符合最终意思
诱饵词条件	4	75%	1701 毫秒	探词为「牛奶」（被否定的词），需主动抑制
无关词条件	4	100%	1395 毫秒	探词为「袜子」，与句子毫不相干

抑制代价（目标条件减去诱饵条件）为25 个百分点的准确率差与260 毫秒的反应时差。语义级抑制存在明显负担。需要说明的是每条件仅四题，统计置信区间较宽，本判定仅作参考。

5.4 常模对比

反应级抑制的一致性效应 71 毫秒位于青少年常模分布的中间区，对应大约第 50 百分位。语义级抑制由于样本量限制无法做强位次判定，待后续补测扩展。

维度五判定：反应级抑制功能正常（约第 50 百分位）；语义级抑制待补测

反应级抑制功能完整意味着被试在标准注意分配与冲动控制任务上无明显问题。语义级抑制的25 个百分点代价提示存在轻度负担，但样本量不足以做强结论。

高考衔接 抑制控制在中学数学中的具体落点

- 陷阱过滤**：选择题迷惑项、应用题无关条件、含参不等式中的单一情况泛化，都需要主动抑制。
- 外解剔除**：圆锥曲线、方程组和参数题中，计算结果必须回代题设范围，不能直接接受所有候选解。

该被试反应级抑制功能正常；语义级抑制样本较少，后续复测中补充观察即可。

维度六 关系语义与反向推理

6.1 概念界定

关系语义与反向推理指在文字描述的数量关系中识别比较方向并对运算符进行反向重构的能力。例如「甲比乙多 5 元，求乙」一题中，表面动词为「多」，但目标量为「乙」，应用减法而非加法。眼动研究证据表明，弱解题者对此类「不一致」题做出更多回视与更长停留，提示其依赖关键词驱动而非真正理解关系。

大样本研究证明，针对一致性效应的语言指导（例如让学生在解题前画出比较关系示意图）能够显著降低反向错题率。这意味着该能力具有较高的教学可干预性。

6.2 本次测量与原始作答

本次评估的应用题模块共16题，涵盖比较式（多 / 少 / 高 / 矮 / 重 / 长 / 便宜）、倍数式（是 N 倍）以及直接情境三种类型。

应用题十六道作答全景

第 1 题 错 比较式 · 多 + 五 应 - 五	第 2 题 错 倍数 · 是 N 倍 × 三 应 ÷ 三	第 3 题 错 倍数 · 是 N 倍 × 五 应 ÷ 五	第 4 题 对 直接情境	第 5 题 对 直接情境	第 6 题 对 直接情境	第 7 题 错 比较式 · 高 + 三 应 - 三	第 8 题 错 比较式 · 少 - 二 应 + 二
第 9 题 对 直接情境	第 10 题 对 直接情境	第 11 题 错 比较式 · 便宜 - 一 应 + 一	第 12 题 错 比较式 · 少 - 五 应 + 五	第 13 题 对 直接情境	第 14 题 错 比较式 · 矮 - 十 应 + 十	第 15 题 错 比较式 · 重 + 五 应 - 五	第 16 题 错 比较式 · 长 + 十 应 - 十

图八 应用题十六道作答全景。绿色为答对（六题，37.5%），红色为答错（10题）。答对题全部为直接情境，答错题全部涉及语义反向。

6.3 错题模式分类

错题类型	错题数	典型题	认知机制
比较式 · 多、高、重、长类	四题（第 1、7、第 15、第 16 题）	「甲比乙多 5 元，乙是多少」选「加五」（错），应选「减五」（对）	表面关键词驱动加法，未做关系反向重构
比较式 · 少、矮、便宜类	四题（第 8、11、12、14 题）	「比红队少 2 人」选「减二」（错），应选「加二」（对）	表面关键词驱动减法，未做关系反向重构
倍数 · 是 N 倍类	两题（第 2、3 题）	「十二是白球的 3 倍」选「乘三」（错），应选「除三」（对）	表面关键词「倍」驱动乘法，未做倍数反向

错题模式呈现高度同质：所有10题错误均落在反向情境，所有六题正确均在直接情境，二者无重叠。这指向单一的底层机制——被试依赖「关键词到运算符的直接映射」策略，对「题目要求把比较关系反过来重构」的元认知步骤缺失。该被试在错题上的平均反应时为 6766 毫秒，长于正确题，表明被试对错题付出了足够的认知投入；错误的成因不在投入不足，应定位至题意解读路径的偏移。

6.4 常模对比

依据眼动研究所建立的常模分布，十二至14岁年龄段成功解题组对不一致比较题的准确率约70%八，不成功组约50%一。该被试37.5%的准确率明显低于不成功组，对应大约第10至第15百分位的位次。需要再次强调：在算术事实流畅性接近上限的前提下，本维度的低分应归因于语义建模层面的特异性缺口，与运算能力不足无直接关联。

维度六判定：关系反向推理为本评估最重要的可干预弱项，约第10至第15百分位

错题模式高度同质，干预靶点极为清晰：需要在涉及比较与倍数关键词的应用题情境中，建立「先识别被求对象，再决定运算方向」的元认知步骤。已有研究证实针对性语言指导能显著降低该类错题率。

高考衔接 关系反向推理在中学数学中的具体落点

- 函数单调性的反向推理**：已知函数在某区间单调递增，反推参数取值范围的题型，需要将「单调性条件」转化为「导数符号条件」再反向求解参数。该被试当前的反向推理薄弱将直接表现为此类题目得分偏低。
- 不等式变形中的方向变化**：含参不等式两边同乘或同除负数时需要反向不等号方向。这是高考易错点之一，对反向推理薄弱者尤甚。
- 几何变换中的逆问题**：例如已知像，求原；已知投影，求空间位置。需要从结果反向重构条件。
- 解析几何中的「求什么」反向理解**：椭圆与抛物线综合题常设置多层「求」结构，例如先求轨迹方程、再求轨迹上某点到定点距离的最值。需要被试在不同求解阶段保持对「目标量」的清晰认识。
- 逆向思维题型**：例如反证法、数学归纳法的逆向应用、概率题中的逆事件运用等。

该被试当前的反向推理弱项若不及时干预，将在高一、高二阶段的函数与不等式综合题、几何变换题、概率综合题中持续表现为低分。建议在干预方案中将此项列为最高优先级（详见第12章）。

维度七 分数概念整体表征

7.1 概念界定

分数与整数存在根本性差异：分数的值不能由其分子或分母直接外推。例如 $1/4$ 与 $1/5$ 比较，分子相同而分母大者反而值小；又如 $3/5$ 与 $3/8$ ，分母大者值小。要正确比较任意两个分数，被试必须将分数作为一个整体的量来表征，而不是将分子与分母作为两个独立整数处理。

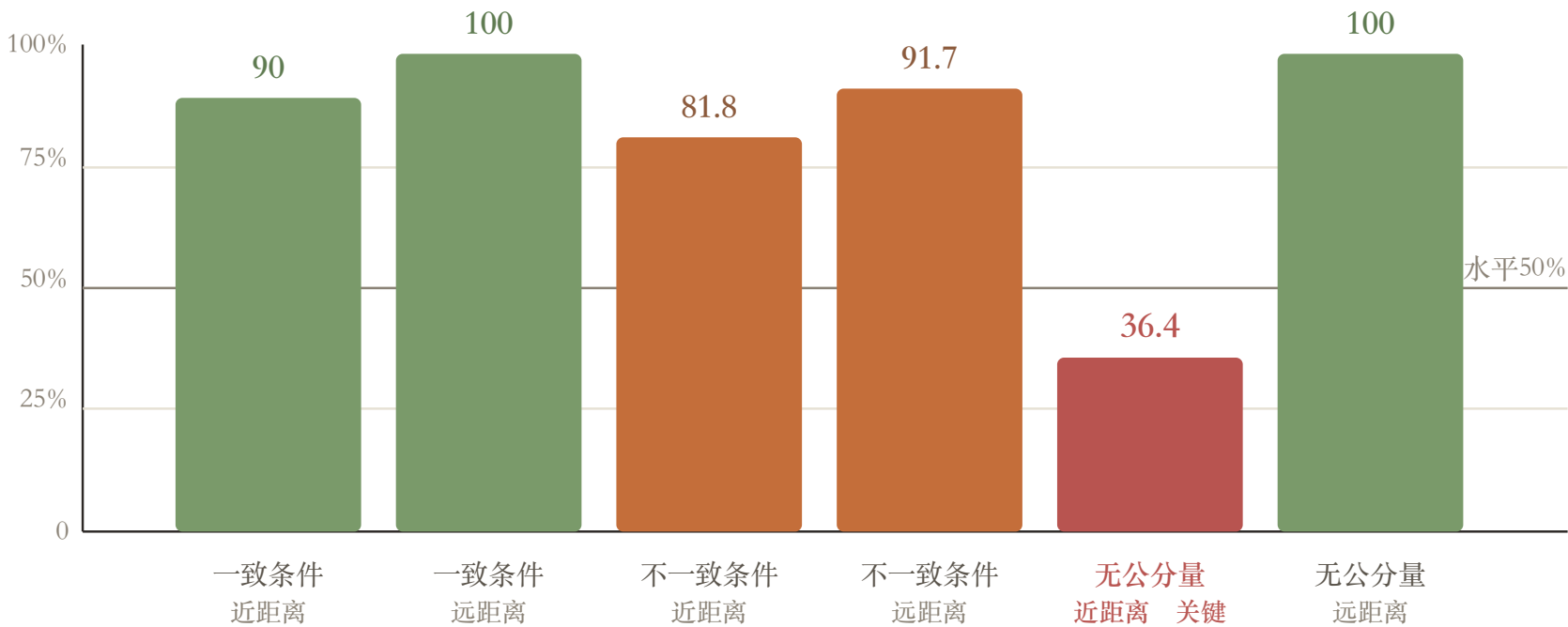
大样本眼动研究表明，未熟练者在比较分数时眼球在分子与分母之间快速跳动，无法形成对「分数整体值」的稳定注视模式。这种「分量比较」策略可以蒙混过大部分基础分数题，但在「无公分量近距离」条件下将出现系统性失败。纵向追踪数据证明，分数概念预测后续一年的数学成绩增长，而后续数学成绩并不反向预测分数概念——分数概念是数学发展的早期瓶颈。

7.2 本次测量与原始作答

分数比较模块采用三种类型与两种距离的六单元设计：

条件	示例	正确解法	分量比较策略能否过关
一致条件	$2/5$ 比 $3/5$	分子大者值大	能（巧合一致）
不一致条件	$3/5$ 比 $3/8$	分母小者值大	能（依靠「分母小值大」启发式）
无公分量条件	$2/5$ 比 $3/7$	必须计算实际数值	不能，必须激活整体表征

分数比较六单元准确率



图九 分数比较六单元准确率。「无公分量近距离」条件下准确率跌至36.4%，跌破机会水平；同一条件下远距离反而回到100%，呈现典型的分量比较策略画像。

7.3 策略识别

从这六个单元可以读出清晰的策略画像：

- 一致条件（分子与分母都指向同一答案）：准确率九十至100%。被试通过分量比较即可获得正确答案。
- 不一致条件（分子相同、分母大者值小）：准确率 81.8% 至 91.7%。被试掌握了「分母小者值大」这一单一启发式。
- 无公分量远距离条件（例如 $1/5$ 比 $4/5$ ，距离明显）：准确率100%。被试通过任意分量上的显著差异即可作出正确判断。
- 无公分量近距离条件（例如 $2/5$ 比 $3/7$ ，距离接近、无公分量）：准确率36.4%，跌破机会水平。该条件下必须真正激活分数的整体数值才能完成比较，分量策略全部失效。

7.4 常模对比

大学生在「无公分量近距离」条件下的准确率约 75% – 85%。德国小学四至五年级学生约 50% – 60%。该被试36.4% 的准确率低于德国小学高年级水平，对应大约第 10 至第 20 百分位。依据纵向追踪研究外推，这一水平的分数概念将在未来六至十二个月内对代数初学（例如解一元一次方程中的分数项、分式方程、比例方程）产生显著拖累。

维度七判定：分数整体表征显著弱项，约第 10 至第 20 百分位

被试已掌握分子分母分量比较的局部策略，能在大部分基础分数题上得分；但分数作为「一个完整的数」这一整体表征尚未稳固建立。需要立即介入「分数作为数」的可视化干预，包括数轴定位、分数化简、分数与小数互换、分数加减的图形表征。

更为本质的是，本评估考察的「分数无公分量近距离条件」并非局限于分数比较任务本身，其反映的是被试对「数」这一抽象对象的整体掌握程度——也即对一个数学量能否在心理表征中作为不可分割的整体进行加工。这一能力构成中学数学中绝大多数核心模块的认知底座：从三角函数比值、解析几何斜率、概率统计的条件概率，到导数的差商定义、数列的分数形式通项，均要求被试在脑中将一个有内部结构的量当作整体来运算。在被试已经具备「会算」能力的前提下，下一阶段教学的关键在于使其「看见数」——将外部计算流程上升为对数学对象本身的稳定心理表征。

高考衔接 「数作为整体」的表征能力在高中数学中的具体落点

本维度测量的不是对分数这一形式的熟悉度，而是被试对「数」这一抽象对象能否在心理表征中作为不可分割的整体来加工。下列高考考点均依赖此项核心能力：

- 三角函数恒等变形**：sin、cos、tan 本质为边比，半角、二倍角与和差化积公式中涉及大量比值的整体替换与约分。能否在脑中把「sin 2x」当作一个量来调用，是决定恒等变形效率的关键。
- 圆锥曲线中的斜率与离心率**：斜率本质为坐标差的比值，离心率为长度比值。解析几何综合题中需要将这些比值作为可代入、可参数化的整体量来处理。
- 导数与极限的差商定义**：导数被定义为分式的极限，分子分母分别承担函数差与自变量差两层含义。理解差商作为一个整体的量，是从函数到导数的关键过渡。
- 概率统计的条件概率与全概率**：条件概率本身是分数；全概率公式与贝叶斯公式中需要对多个分式同时加权求和。每一个分数都必须作为一个完整概率值来运算。
- 分式方程与分式不等式**：考点涉及把分式视为整体代数对象的通分、移项、消元。整体表征薄弱者常出现「分子加分子、分母加分母」一类原则性失误。
- 数列与极限**：裂项相消法、分式数列求和、调和级数估计等均要求对每一项的分数形式做整体观察。
- 向量与坐标比例**：定比分点、向量共线、线性组合系数等本质上是「数与数之间比值」的整体运算。

需要强调，本维度所反映的能力并非「会不会分数」这一具体技能问题，而是对数学量进行整体心理表征的根本能力。这一能力构成高中数学的隐性基础设施：函数、三角、解析几何、概率、导数、数列六大核心模块均建立其上。被试在算术事实层面达到接近上限的同时，在该项底层能力上落入低分区，是本评估最具诊断意义的发现之一。若该能力不在初中阶段得到建立，进入高中后会持续表现为「计算正确但概念出错」一类失分模式，并随知识难度上升而累积。建议在干预方案中将此项列为高优先级（详见第 12 章）。

调节变量 数学焦虑

8.1 概念界定

数学焦虑指在面对数学情境或数学任务时所体验到的紧张、担忧与负性情绪反应。大量行为与脑成像研究证实，数学焦虑通过损耗中央执行机能的工作记忆资源来降低数学表现。结构方程模型指出，数学焦虑通过工作记忆、符号数量加工与直接路径三条通路影响数学表现。神经基础上，高数学焦虑者在面对数学刺激时右杏仁核与双侧脑岛激活增强，顶内沟激活降低。

Namkung、Peng 与 Lin 于 2019 年发表于 *Review of Educational Research* 的元分析对学龄阶段数学焦虑—数学表现关系做了迄今最大规模的整合，纳入 131 项研究、478 个效应量，结果显示二者的负相关达到 $r = -0.34$ ，属于中等强度的稳定效应。该研究尤其重要的发现是：难度越高的数学任务，受数学焦虑破坏的程度越大；解题流畅性、问题求解等高阶任务相对于基础事实提取，对焦虑的敏感性显著更高。Peng 等在工作记忆—数学元分析中（110 项研究、829 个效应量）已经显示工作记忆是数学表现的核心二阶通道，结合 Namkung 等 2019 的结果可形成一个清晰链条——情绪状态先损耗中央执行的工作记忆资源，工作记忆资源不足继而拖累高阶解题流畅性。

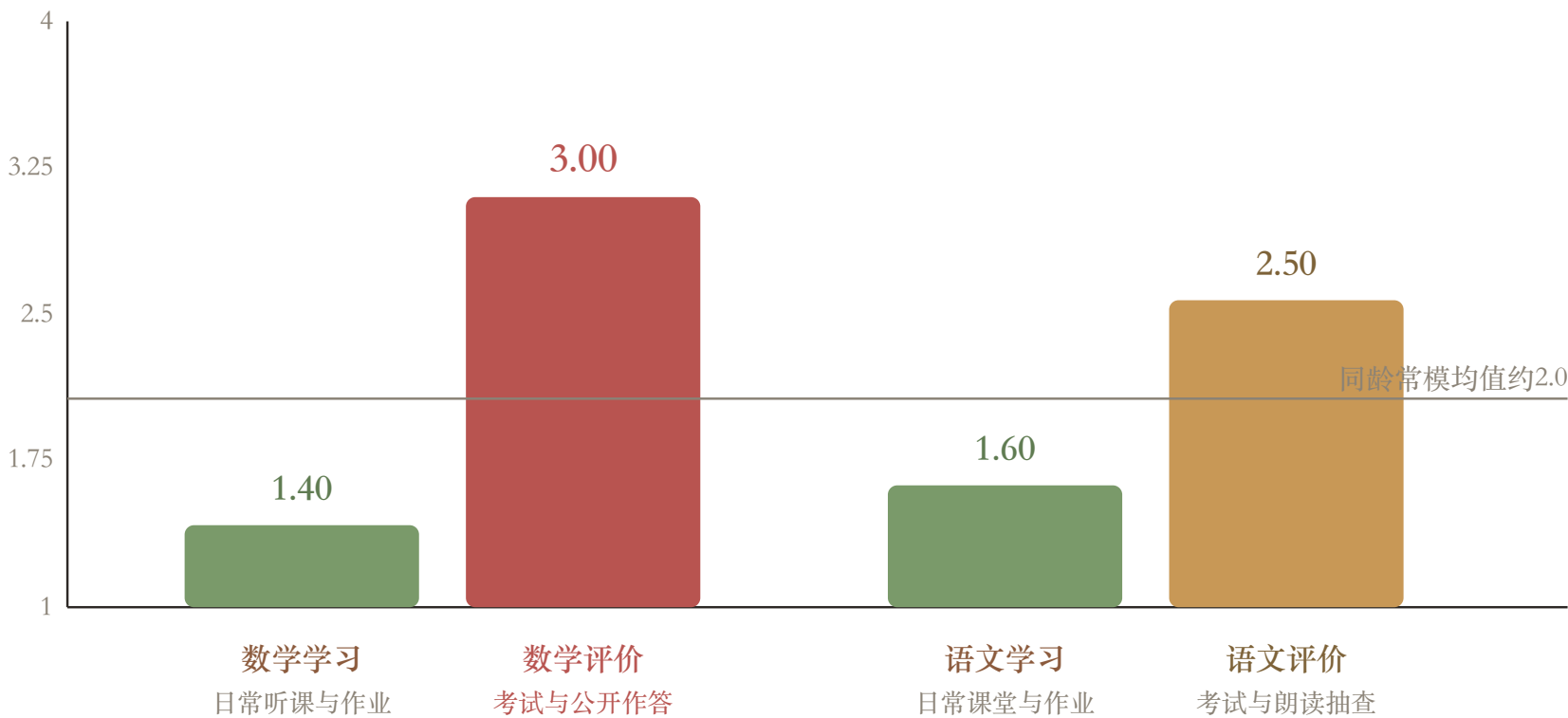
数学作为一种脆弱的能力

上述证据汇聚出一个常被忽视但具有重要现实意义的结论：数学能力并不是一种「学会即稳定」的硬技能，它在心境层面具有特异性的脆弱性。同一名学生，在情绪平稳时可能完成一道高难度多步运算，但在评价情境下因焦虑激活会出现工作记忆收缩，进而呈现「平时会做、考试做不出」的表面矛盾。这种脆弱性在中等以上难度任务上尤为显著，恰好覆盖高考所重点考察的题型。对这一性质的忽视常导致教学层面只关注「会不会做」而忽略「在何种心境下还会做」。本评估系统强调数学焦虑作为独立调节变量纳入考察，正是基于这一脆弱性的实证基础。

8.2 本次测量与原始作答

本评估采用九题数学焦虑与九题语文焦虑分量表，各分量表又区分学习情境（L）与评价情境（E）两个子维度。四点评分：一分代表「一点也不焦虑」，四分代表「非常焦虑」。

数学／语文焦虑四子维度对比



图十 数学／语文焦虑四子维度对比。一分代表一点也不焦虑，四分代表非常焦虑。数学评价情境得分最高。

8.3 常模对比

中国青少年数学焦虑量表常模（3,000 余名受试者）显示数学焦虑总均值约二点零，标准差约0.7。该被试的数学评价子维度得分3.00对应大约第 90 百分位，属于高焦虑组。语文评价子维度2.50对应大约第 75 百分位。数学学习与语文学习两个子维度均位于均值之下，提示被试对日常学习并不焦虑，而是评价情境特异性激活。

8.4 与工作记忆的交互效应：脆弱性的具体路径

本次评估的一个重要发现是焦虑与工作记忆的交互。该被试言语工作记忆本身处于第 25 至第 30 百分位（维度三），数学评价焦虑通过中央执行损耗通路进一步削弱可用工作记忆资源。在考试场景下，该被试实际可用的工作记忆容量低于平时基线，对多步应用题、链式心算高级段、分数比较无公分量条件等高负荷任务的表现产生进一步压缩。这一交互效应解释了「平时会做、考试就丢」一类常被误归因于「粗心」的表现现象。

结合 Namkung 等 2019 元分析中「任务难度越高、焦虑越具破坏性」的结论，可以预判该被试在面对高难度数学题时受焦虑干扰的程度将显著高于面对基础题时。换言之，被试在第二、三层能力上已经存在的薄弱（工作记忆中等偏下、反向推理与分数概念低位）将在情绪激活状态下被进一步放大。这一现象在统计上呈非线性——基础题型几乎不受影响、综合题型表现下降一档、压轴题型表现可能下降两档，与本评估第七章揭示的「数学作为脆弱能力」的画像一致。

数学焦虑判定：评价情境特异性高焦虑，约第 90 百分位

需要在干预方案中作为独立的情绪与动机模块同步处理，否则即便算术与分数训练成功，考场表现仍会被该通路拖累。

高考衔接 数学焦虑在中学数学中的具体落点

- 压轴题表现：**高考数学第 21 与第 22 题往往是分值高、综合性强的压轴题，对焦虑敏感者的表现影响最大。
- 时间紧迫感：**高考120分钟完成第 22 题，对焦虑敏感者会出现「越紧张越慢」的恶性循环。
- 选择题准确率下降：**焦虑会放大对陷阱选项的过度警觉，反而增加错误。
- 大题写不到位：**评价焦虑下被试容易出现「跳步」「漏写」一类失分。

该被试的数学评价焦虑特异性高于学习焦虑，提示其在日常学习中表现可能优于在考试中表现。建议通过模拟考试暴露与情绪调节训练（详见第 12章）逐步降低评价情境敏感性。

十二、生活方式调查 IPAQ 体力活动与认知

12.1 原始作答与得分

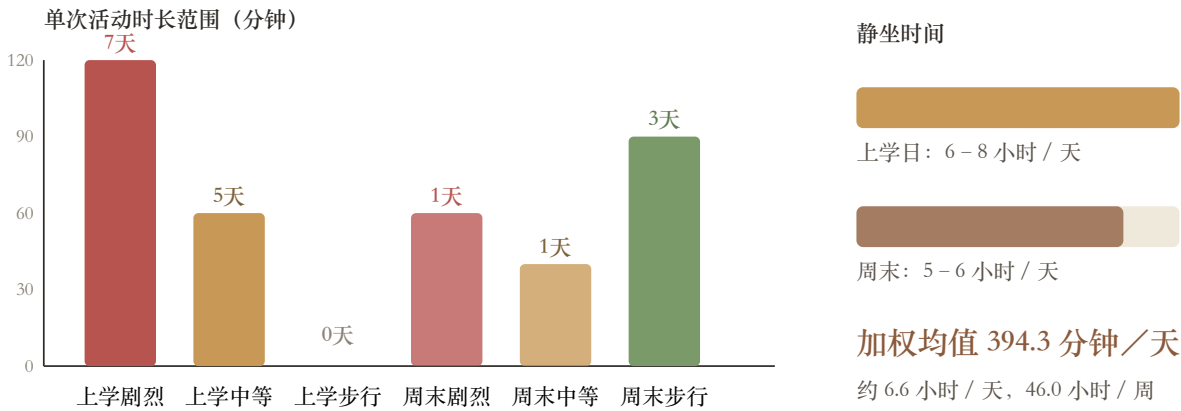
本评估的首个模块为简化版国际体力活动问卷（IPAQ），用于了解被试日常的运动量与静坐时长。IPAQ 通过将剧烈运动、中等强度运动、步行的频率与时长换算为代谢当量分钟数（MET-minutes），得到一个反映总体体力活动水平的综合指标。该被试的作答与计算结果如下：

指标	数值	含义
MET-min 总分	37 545	每月总代谢当量分钟数，按上学日与周末分别累计
平均静坐时间	394 分钟 / 天	上学日权重 5/7、周末权重 2/7 加权平均，约 6.5 小时 / 天
IPAQ 等级	高活动量（High）	WHO 高活动量分类，要求 MET ≥ 3000 或剧烈运动每周 ≥ 3 天且 MET ≥ 1500

37 545 月 MET-min 总量	394.3 静坐分钟 / 天	46.0h 估算静坐小时 / 周	High IPAQ 活动等级
------------------------	-------------------	---------------------	-------------------

时段	强度	频率	单次时长	解释
上学日	剧烈运动	7 天 / 每天都有	1.5 – 2 小时	构成 MET 总量的主要来源
上学日	中等强度	5 天	51 – 60 分钟	稳定补充有氧与技能活动
上学日	步行	0 天	自动跳过	通勤 / 步行型活动较少
周末	剧烈运动	1 天	51 – 60 分钟	周末仍保留高强度活动
周末	中等强度	1 天	31 – 40 分钟	中等强度活动较少
周末	步行	3 天	1 – 1.5 小时	周末步行补足低强度活动

IPAQ 活动结构：频率、时长与静坐负荷



IPAQ 活动结构图。柱高表示该强度在对应时段的单次时长上限，柱上文字表示频率；右侧为静坐时间的加权结果。

从原始作答可见，该被试自报上学日每天进行 1.5 – 2 小时剧烈运动、5 天每天 51 – 60 分钟中等强度运动；周末维持适度运动。总 MET-min 数值偏高（高于多数同龄常模），同时静坐时间约 6.5 小时 / 天处于青少年常见水平。综合分类为「高活动量」，是数学认知干预非常有利的条件。

12.2 具身认知视角下的运动对数学的促进机制

体力活动与数学认知之间存在系统性的正向关联，这一关联并非源自简单的「体力好、脑也好」的笼统推理，而是建立在三条具体可测量的神经认知机制之上。

- 有氧运动直接提升海马—前额叶系统的神经可塑性。运动诱发脑源性神经营养因子（BDNF）的分泌，BDNF 在长期增强（LTP）与突触新生中起关键作用。海马依赖的空间—顺序记忆和前额叶承担的工作记忆均直接受益。对该被试而言，言语工作记忆（维度三）与多步运算整合（维度四）正是受 BDNF 通路调控的认知功能；持续的有氧运动可以从神经生物学层面为这两项能力提供生长基础。
- 技巧性运动专门提升认知灵活性与抑制控制。羽毛球、乒乓球、篮球等开放技能项目要求运动员在毫秒级时间内对环境信息进行处理、预测、反应抑制与策略切换。这类运动对前额—顶叶网络的训练效果比单纯的跑步、骑车等闭合技能项目更强。已有研究在儿童与青少年样本中显示，参与羽毛球、乒乓球等隔网对抗类运动的学生在 Flanker、Stroop、任务转换等抑制与灵活性任务上的表现显著高于不运动或仅参加耐力运动的对照组。这些抑制与灵活性能力直接对接高考数学的分类讨论、参数题、多解题剔除等场景。
- 具身数学认知（embodied numerical cognition）的双向关联。具身认知理论强调高级认知能力的神经基础与身体经验、空间运动经验高度耦合。数感的形成依赖空间—数轴心理映射，而该映射的形成与儿童的爬行、跳跃、投掷、空间定向等运动经验直接相关。一项典型的实证范式显示，将分数比较任务与全身位移任务结合训练（在数轴上跑步定位至 1/3 处），相对于纸笔训练能显著提升分数概念的内化速度。该原理对应该被试维度七（分数概念整体表征）的薄弱状态——单纯纸笔训练可能不足，结合身体—空间表征的训练有更高效率。

12.3 对本被试的具体建议

该被试在 IPAQ 上呈现的高活动量状态是其当前最被低估的认知资源。在干预方案中应特别注意保护并优化这一资源：

- 保留并优化现有运动总量。该被试日常剧烈运动量已达 WHO 推荐青少年标准的上限，不需要增加运动量。重点是调整运动结构，使其中至少 2 至 3 次 / 周为开放技能项目（建议羽毛球、乒乓球、篮球、足球等隔网或对抗类）。这类项目在认知灵活性与抑制控制的训练效果上明显优于跑步、骑车等闭合技能项目。
- 建立运动—学习节律耦合。考虑将每日数学学习安排在运动结束后 1 – 2 小时内进行。运动后短时间窗口内 BDNF 水平显著抬升，是神经可塑性的高峰期；此时进行新概念学习（尤其是涉及空间—数值表征的分数、代数、几何内容）效率更高。
- 降低静坐时间。394 分钟 / 天的静坐属于青少年常见水平，但仍有压缩空间。建议每 25 至 30 分钟数学学习后插入 5 分钟轻度活动（伸展、短走、原地跳跃），既可缓解本评估第 13.3 节所揭示的「数学情境耐受度偏低」状态，又能维持脑内血流灌注。
- 避免运动—学习时间冲突。考前一段时间不宜中断常规运动节奏。常见误区是「考前减少运动以节省时间复习」，研究证据反向支持——保持稳定运动节奏的学生在考场表现的稳定性显著高于临时中断运动者。

IPAQ 判定：高活动量状态，是干预方案最重要的支撑性资源

该被试在生活方式维度上具备良好的基础，应主动将这一基础转化为认知干预的助力——通过开放技能运动比例的提高、运动—学习节律耦合、静坐时间分割三项调整，把现有体力活动量从「日常习惯」升级为「认知能力的训练加速器」。

十三、综合解读与高中数学衔接

13.1 三层能力结构

被试数学认知三层结构示意

第一层 基础运算与符号数感

算术事实流畅性90%五 整数比较90%二 因式分解90%二

评估结论：显著优势，约第 70 至第 80 百分位

第二层 工作记忆与抑制控制（执行系统）

言语工作记忆80% 高级链式心算50% 旁侧抑制90%五至百

评估结论：中等偏下水平，约第 25 至第 30 百分位（运算广度待补测）

第三层 关系语义与整体表征

应用题反向推理37.5% 分数无公分量近距离36.4% 数学评价焦虑三点零

评估结论：显著弱项，约第 10 至第 15 百分位

图十一 被试数学认知三层结构。第一层程序性能力扎实，第二层执行系统中等偏下，第三层语义与概念层显著薄弱。该结构呈现典型的程序性与概念性发展不均衡模式。

13.2 核心矛盾：程序性与概念性的发展不均衡

整合七个维度的结果，可以得出本次评估的核心结论：该被试在程序性运算层面表现优良，但在概念性理解与语义建模层面发展滞后。已有研究指出数学的概念知识与程序知识应当迭代发展，二者之中任一方落后都会限制另一方的进一步提升。纵向追踪数据进一步表明，分数概念预测后续一年的数学成绩增长，而后续数学成绩并不反向预测分数概念。这意味着单纯通过题量训练程序性运算并不能补回概念性理解的缺口。

被试当前正处于这一不均衡发展的关键期。三个具体表现：

- 能熟练计算 一百除以五，但不能识别「一百是五的几倍」这一反向关系链，应用题中遇到「是 N 倍」的反向情境时持续出错。
- 能正确读出分数并完成基础比较，但未将分数作为一个完整的数进行心理表征，依赖分子分母分量比较的局部策略，在「无公分量近距离」条件下系统性失败。
- 能在简单的 2 – 3 步运算中保持中间结果（链式初级 100%），但无法在多步运算中持续保持中间项（链式高级 50%），同时持有「中间数与下一步运算」的能力受限。

上述三个表面差异共享同一个底层缺口：数学语义建模能力的发展滞后于程序性算术能力。该缺口在中学阶段将持续放大，影响对高级数学概念的理解与应用。

13.3 数学作为一种脆弱能力——与阅读的鲜明对照

本次评估同时揭示出一项常被中学教学体系忽略的现象学事实：数学不是一种「掌握即稳定」的能力，它在认知层面具有相对其他学科特异的脆弱性。这种脆弱性在与日常阅读的对照下尤为显著。

阅读是高度自动化、可分散注意进行的活动——人可以边走边读路牌、边等公交边翻短消息、边吃饭边看小说，对阅读理解的影响仅是轻微减速；阅读通道允许并行的低优先级处理，对环境、情绪、姿势具有极高的容错度。数学解题则呈现截然相反的特征：数学要求注意力的近乎独占、工作记忆的连续维持、每一步的精确性。在喧闹环境中阅读一段文字通常不构成困难，在喧闹环境中完成一道四步代数题则几乎不可能；行走过程中浏览一篇文章无碍理解，行走中完成一道二倍角恒等变形则中间结果立刻流失。这种「不容差池」的特性使得数学能力对情绪、疲劳、环境干扰高度敏感。

这一脆弱性已被多项大样本研究在数值层面反复确认。Namkung、Peng 与 Lin 于 2019 年通过 131 项研究、478 个效应量的元分析得到数学焦虑—数学表现 $r = -0.34$ 的稳定中等负相关，其关键边际结论是：难度更高的数学任务受焦虑破坏的程度更大；解题流畅性、问题求解一类高阶任务相对于基础事实提取，对焦虑的敏感性显著更高。Peng 等 2016 年的工作记忆—数学元分析则提供了机制层面的对应：工作记忆在不同数学子领域中作为二阶通道的角色不同——其中多步推理与多位数计算两类对工作记忆资源的依赖最高，因而也最容易在中央执行被情绪占用时表现出垮塌。换言之，数学之所以脆弱，是因为它对中央执行系统的需求接近其容量上限；任何对该系统的占用（焦虑、疲劳、外界打扰）都直接表现为运算质量下降。

对该被试而言，这一脆弱性具有具体的临床意义：（一）维度三的言语工作记忆已经处于第 25 至第 30 百分位的中等偏下位置；（二）维度七的数学评价焦虑达到约第 90 百分位的高位；（三）维度十三所记录的主观负荷数据显示其在算术流畅性模块后精力自评跌至量表最低值。三条证据合并指向：在长时间、高强度、评价情境下的数学训练或考试中，该被试的实际可用认知资源会比训练状态下的基线显著收缩。

因此在干预设计层面，对该被试单纯增加题量训练并不足够；必须同步关注情绪与节律两条辅线，包括（a）单次训练时长不宜超过 25 至 30 分钟，避免主观负荷自评从「不难」直接跳到「精力枯竭」的模式被强化；（b）将高强度数学练习与认知负荷较低的活动交替穿插；（c）在考前情境暴露训练中专门处理评价焦虑（详见第十二章）。这些建议的科学基础来自对「数学作为脆弱能力」这一性质的实证理解，超越了对运算能力或概念能力本身的训练范畴。

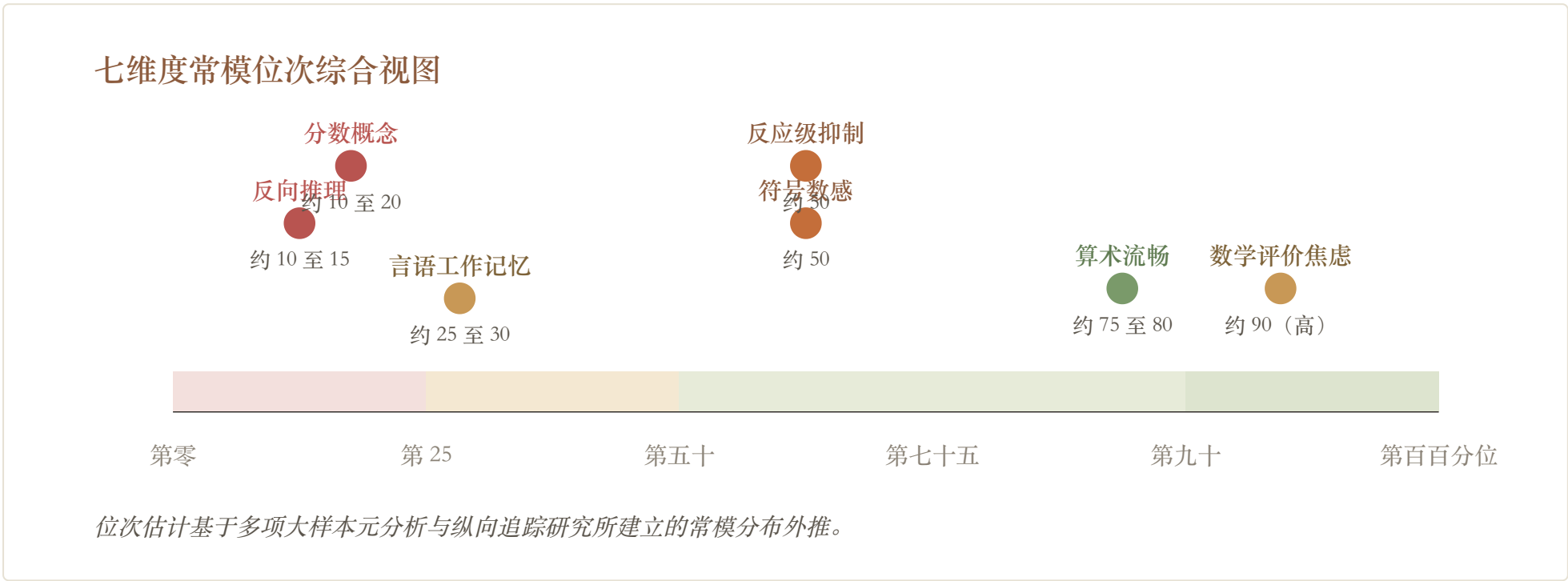
13.4 神经认知层面的可能位置

结合三重编码模型的解剖学定位：

- 左角回（言语事实表征系统）支持算术事实快速提取。该通路在本被试上功能完整。
- 双侧顶内沟（抽象量级编码）支持整数大小比较。该通路在低复杂度场景下功能完整，但在「分数无公分量近距离」一类必须激活整体表征的场景下不稳定。
- 左下额回与左前额叶（中央执行与关系处理）是被试当前的主要瓶颈区域，影响多步运算、反向关系建模与分数概念整合三个表层弱点。

这种「算术流畅但分数整体表征不稳定」的双解离模式与顶叶损伤研究的发现相一致——该研究证实左顶内沟损伤会特异性导致近似量比较障碍，而不一定连带影响其他数字处理能力。在临床健康青少年身上，类似的模块特异性表现为不同认知通路的发展速率差异。

13.5 各维度位次综合视图



图十二 七维度常模位次综合视图。整体能力分布呈现65 – 80 个百分点的极端落差，最高位（算术流畅）与最低位（反向推理）之间的差距凸显了能力发展的严重不均衡。

13.6 高中数学衔接综合表

将本次评估的七个维度与中国普通高中数学必修与选修课程标准中的核心知识点逐一对应，可以形成如下衔接表：

评估维度	当前位次	高考核心考点	影响机制
算术事实流畅性	第 75 至 80	所有计算密集型题目；解析几何参数代入；导数求极值时的多次代换；解方程组	基础运算自动化释放认知资源给高阶策略；直接影响考场时间分配
符号数量表征	第 50	含参不等式比较大小；函数取值估算；数轴定位；区间运算	影响数感型选择题与估算型题目
反应级抑制	第 50	选择题陷阱选项识别；圆锥曲线参数题多解剔除；含参不等式的范围讨论	影响选择题准确率与综合题分类讨论的全面性
言语工作记忆	第 25 至 30	三角函数恒等变形；立体几何辅助线证明；数列归纳与递推；概率多步计算；解析几何参数题	影响多步推理稳定性；高负荷题型表现波动
链式心算 (多步运算整合)	第 20 至 25	三角函数综合题；立体几何综合证明与计算；解析几何综合题；导数综合题；数列归纳；概率综合题——构成高考第 17 至 22 题主体，占全卷分值约 60%	直接限制综合题与压轴题的运算链长；超出容量后呈跳步式失分
关系反向推理	第 10 至 15	函数单调性反推；不等式变形方向变化；几何变换中的逆问题；解析几何「求什么」反向理解	影响压轴题尤其涉及参数与逆向思维的部分
对数学量的整体表征 (以分数比较为探针)	第 10 至 20	三角函数恒等变形；解析几何斜率与离心率；导数差商定义；条件概率与全概率；分式方程与分式不等式；数列裂项相消；向量比例	影响函数、三角、解析几何、概率、导数、数列六大核心模块的整体掌握程度
数学评价焦虑	第 90 (高)	压轴题表现；时间紧迫感；选择题准确率；大题书写完整度	通过损耗工作记忆资源整体影响考场发挥

十四、干预建议

14.1 最高优先级 反向推理的元认知与认知卸载策略

该项是本评估中错题模式最同质、干预目标最明确的一项。错题的核心机制是被试在阅读题面时直接将表面关键词映射到运算符，缺乏「在动手算之前先评估自己理解了什么」的元认知步骤。对应的干预路径并非「再多做几道题」，而是建立两类策略习惯：

- 元认知策略：解题前的自我提问与监控。**要求被试在每道应用题动笔前必须先回答三个固定问题——「题目问的是谁」「题目给的是谁」「这两者之间是大于还是小于的关系」。这三个问题的答案在心中明确之后，运算符的方向才被允许选定。该习惯一旦形成，被试在面对类似情境时会自动进入「先评估、后执行」的解题模式，从源头上拦截关键词驱动的错答。
- 认知卸载策略：把心算外化为符号。**要求被试在每道关系反向题中画出最简的比较示意图（两条线段，标注「多」「少」），把脑内的关系建模卸载到纸上。被试无需在脑海中同时维持「关系方向」「被求对象」「运算符」三层信息——这些信息分散到纸面上，工作记忆只需要承担最后一步的运算。认知卸载是已被广泛证实有效的减负策略，尤其对工作记忆容量受限的被试效用显著。
- 自我解释训练。**让被试解完一道题后用一句话向自己解释「为什么用这个运算符」。自我解释是建立元认知最直接的方法，长期使用可将策略性思考内化为习惯。

上述训练的目标不是让被试记住更多「比较句的解法」，而是建立可在所有数学情境中迁移的两类底层策略：解题前的元认知评估与解题中的认知卸载。这两类策略在高考综合题（函数单调性反推、不等式变形方向变化、解析几何逆向求参）中具有同等关键的作用。

14.2 高优先级 代数式熟练度与认知负荷内化

分数比较模块所揭示的并非「不会分数」这一具体技能问题，而是对具有内部结构的数学量缺乏整体熟练度。该被试在面对分数时需要分别加工分子与分母，本质是因为分数作为符号整体未在长时记忆中形成熟练的表征。同样的机制会在初学三角函数比值、解析几何斜率、分式代数、根式化简等场景下反复出现——每一种新的代数式都会以「未熟练状态」占用大量工作记忆，使被试将本应用于解题策略的认知资源消耗在符号解码上。

解决路径是提升对具体代数式的熟练度，使每一类代数式从「需要加工的符号串」内化为「单元化的整体对象」。一旦内化完成，该代数式在后续计算中所占用的工作记忆负荷将显著降低，被试可将释放出的资源用于真正的数学推理。具体训练方案：

- 分式表达式的系统化练习。**从最基础的 a/b 形式开始，按「同分母加减 → 异分母通分 → 分式约简 → 分式乘除 → 复合分式」的难度阶梯系统训练，目标是让被试看到 $(a+b)/(c-d)$ 这一类表达式时不再「看到分子和分母」而是「看到一个分数对象」。
- 根式表达式的熟练度构建。**系统训练 $\sqrt{a}$ 、 $\sqrt{ab}$ 、 $a\sqrt{b}$ 、 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ 这类表达式的整体加工。目标是让被试在面对 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 时不再「分别处理 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 」而是将其作为一个整体的代数对象进行变形。
- 三角函数比值的单元化。**系统训练 $\sin x$ 、 $\cos x$ 、 $\tan x$ 、 $\sin^2x$ 、 $\cos 2x$ 等表达式的整体加工。每一类表达式应当达到「看到即知其含义、可直接代入」的自动化水平。
- 常见恒等式的熟练度。**对 $(a + b)^2$ 、 $(a - b)^2$ 、 $a^2 - b^2$ 、 $a^3 \pm b^3$ 、 $\sin^2x + \cos^2x = 1$ 、 $\cos 2x = 1 - 2\sin^2x$ 等高频恒等式进行 spaced repetition 训练，使其成为可瞬时调用的认知单元。

这一路径的内在逻辑是：被试当前的「数学量整体表征」之所以薄弱，本质是因为常见代数式尚未在长时记忆中被熟练化为整体单元；只有当代数式被内化为单元化的对象，被试在解题中的实际工作记忆消耗才会下降，整体表征能力才会自然涌现。该训练比传统的「画饼图、定位数轴」更接近问题的实质，且与高中数学（函数、三角函数、解析几何、概率统计、导数）的所有核心模块直接对接。

14.3 高优先级 链式心算容量训练

多步运算整合容量在中学到高考阶段的预测意义高于单步算术流畅性，且高度可训练。推荐方案为 8 周一个周期：

- 第 1–2 周 言语外化训练：**每天 15 分钟链式心算练习，从 3 步纯加减起步。要求被试在每一步后口头复述当前中间结果。这一方法将工作记忆的内部维持外化为听觉—言语循环，实证有效降低中间项流失。
- 第 3–4 周 链长递增：**步数从 3 步逐步增至 4、5、6 步，运算从纯加减扩展到加减乘，再至四则混合。每达到 80% 准确率方可升级。
- 第 5–6 周 纸笔辅助过渡：**练习「先口算、再纸笔验证」两阶段法；目的不是把所有过程纸笔化，而是建立「中间结果纸笔外化」的策略习惯。这一阶段链长可挑战至 6 至 7 步。
- 第 7–8 周 与高考综合题对接：**选取一道高考真题（如三角函数综合题），让被试在解题过程中明确标注每一步的中间式，从纸笔标注逐步过渡至口头标注。

该项训练与维度三（工作记忆）训练具有协同效应；与维度二（基础算术流畅性）训练顺次衔接：基础流畅性是单步速度，链式心算是多步整合，二者构成连续的运算能力谱。

14.4 中等优先级 言语工作记忆容量训练

工作记忆容量本身的可训练性在已有研究中存在争议，但与数学情境耦合的言语外化训练可以实质性提升数学情境下的可用工作记忆。推荐方案：

- 在高中数学的多步推理（如三角函数恒等变形、数列归纳）中养成借助纸笔外化中间结果的习惯，避免长时间将信息保持在脑中。
- 运算广度模块在评估系统 v2.6 中补测，约 5 分钟即可获得直接定量数据，用于精确判定本维度位次。
- 本项训练实质上与 12.3 链式心算训练高度交叠，可视为同一训练计划在不同认知层面的反映。

14.5 中等优先级 考试情境焦虑调节

本干预可与上述三项并行展开：

- 模拟考试暴露：**每周一次三十分钟的小测演练，模拟考试氛围，目标是将「考试等同于评判」的认知重构为「考试等同于练习的常规快照」。

- 呼吸与认知重构：考前一分钟做四秒吸气、七秒屏息、八秒呼气的呼吸练习；在草稿纸上写下「我要做的这道题我会怎么做」而非「如果做不出来怎么办」。
- 三个月后用本评估系统中的数学焦虑量表复测，定量观察评价焦虑分数的变化。

14.6 下一次评估建议

在完成上述干预训练后如有需要，可再次进行评估，以定量观察各维度的变化情况。复测的具体题目组合与时间间隔可在干预结束阶段视实际进展确定。

十五、附录 原始数据细览

15.1 应用题十六道完整作答

题号	题目	所选算式	正解算式	结果	反应时
一	甲有二十元，甲比乙多 5 元。乙有多少？	$20 + 5$	$20 - 5$	错	5.6 秒
二	黑球十二个，是白球的 3 倍。白球有多少？	12×3	$12 \div 3$	错	—
三	大米重一百斤，是面粉的 5 倍。面粉重多少？	100×5	$100 \div 5$	错	—
4	直接情境（合并题型）	—	—	对	—
5	直接情境	—	—	对	—
6	直接情境	—	—	对	—
7	今天气温二十五度，比昨天高 3 度。昨天多少度？	$25 + 3$	$25 - 3$	错	—
8	蓝队有 10 人，比红队少 2 人。红队有多少？	$10 - 2$	$10 + 2$	错	—
9	直接情境	—	—	对	—
10	直接情境	—	—	对	—
11	铅笔二元，比圆珠笔便宜 1 元。圆珠笔多少钱？	$2 - 1$	$2 + 1$	错	—
12	甲有二十元，甲比乙少 5 元。乙有多少？	$20 - 5$	$20 + 5$	错	—
13	直接情境	—	—	对	—
14	妹妹高 130 厘米，比姐姐矮 10 厘米。姐姐高多少？	$130 - 10$	$130 + 10$	错	—
15	哥哥重 45 公斤，比弟弟重 5 公斤。弟弟重多少？	$45 + 5$	$45 - 5$	错	—
16	红绳长 50 厘米，比绿绳长 10 厘米。绿绳长多少？	$50 + 10$	$50 - 10$	错	—

15.2 分数比较六单元拆分

类型	距离	题数	准确率	平均反应时	诊断标注
一致	近	10	90%	1449 毫秒	分量策略可过
一致	远	14	100%	1944 毫秒	分量策略可过
不一致	近	11	80%一点八	2334 毫秒	分母小者值大启发式
不一致	远	12	91.7%	2032 毫秒	分母小者值大启发式
无公分量	近	11	36.4%	2600 毫秒	整体表征失败
无公分量	远	13	100%	1689 毫秒	任意分量差异可蒙对

15.3 主观负荷自评四个检查点

插入位置	难度 (1 – 9)	费脑 (1 – 9)	当下精力 (1 – 9)	解读
算数流畅性后	2	2	1（最低）	客观完成情况接近上限，主观难度与费脑评分均位于量表最低端；同一时刻精力自评跌至 1 分（量表最低值）。难度低与精力枯竭的反差不能由任务本身的认知负荷解释，提示被试在数学运算情境下的心理耐受度偏低——任务本身并不困难，但持续暴露于数学材料即引发显著疲劳。
链式心算后	5	5	5	精力自评恢复至量表中点，主观难度与费脑评分上升至中等
旁侧抑制后	4	4	5	注意力任务消耗中等，精力维持稳定
分数比较后	5	5	5	主观评价与客观难度一致，精力维持中等水平

主观负荷数据的关键观察是：算数流畅性后的「难度 2 / 费脑 2 / 精力 1」组合呈现明显错位。该被试在该模块的客观表现接近上限，其本人评价该任务为「不难、不费脑」，但精力消耗却达到量表最大值。这一模式表明，对该被试而言，持续接触数学材料本身比完成数学任务更具消耗性。与第七章所示的数学评价焦虑高位（3.00 分）相结合，可推断被试对数学情境存在情绪层面的负性反应，该反应独立于任务难度本身，构成其在长时间数学训练或考试场景中表现可能不稳定的潜在因素。在干预方案中需注意对数学接触时长的节律设计，避免单次过长的数学训练强化此种耐受度偏低的状态。

十六、参考文献

本报告所引用的常模来源于以下高引用、大样本与元分析研究。所有常模化判定均依据下列文献所报告的样本均值与标准差进行外推。

1

Duricy E. 等. 顶内沟在数量加工中的作用：顶叶损伤病例的系统综述. *Behavioural Brain Research*. 2025 年. 二十七例顶叶损伤患者.
<https://consensus.app/papers/details/26281e58372559338a13412937b2d3dc/>

2

Piazza M. 等. 人脑顶内沟皮层中数量与数字符号的共同量级编码. *Neuron*. 2007 年. 被引806 次.
<https://consensus.app/papers/details/f3d8bb034a675aa3a1cddf30e55744b8/>

3

Bos I. F. 等. 小学儿童工作记忆与数学：元分析. *Educational Research Review*. 2013 年. 被引516 次.
<https://consensus.app/papers/details/697f6f1e8d3e5cd495252b73795ad7ca/>

4

Zhang Q. 等. 小学儿童工作记忆与算术的关系：元分析. *Brain Sciences*. 2022 年. 样本量11,224人.
<https://consensus.app/papers/details/7dce2acacd3f5b4dac04107258c03b55/>

5

Peng P. 等. 数学与工作记忆的元分析. *Journal of Educational Psychology*. 2016 年. 被引481 次. 110 项研究, 829 个效应量.
<https://consensus.app/papers/details/787aedfcf827507caffac80553e3a430/>

6

Ashcraft M. H., Kirk E. P. 工作记忆、数学焦虑与表现之间的关系. *Journal of Experimental Psychology: General*. 2001 年. 被引1,415 次.
<https://consensus.app/papers/details/5a0480987deb50fb9546e245687e2367/>

7

Finell J. 等. 工作记忆在数学焦虑与数学表现关系中的中介作用：元分析. *Frontiers in Psychology*. 2022 年.
<https://consensus.app/papers/details/ab07173f00575902946375fd7e09b8f6/>

8

Skagerlund K. 等. 数学焦虑如何损害数学能力? . *PLoS ONE*. 2019 年.
<https://consensus.app/papers/details/78a258a0d6575029ab1b6b75fd50e3e2/>

8a

Namkung J. M., Peng P., Lin X. 学龄阶段数学焦虑与数学表现的关系：元分析. *Review of Educational Research*. 2019 年; 卷 89, 期 3, 459 – 496 页. 131 项研究、478 个效应量, $r = -0.34$; 难度更高的数学任务受焦虑破坏的程度更大.
<https://journals.sagepub.com/doi/10.3102/0034654319843494>

9

Spiegel J. A. 等. 小学儿童执行功能与学业成果的关系：元分析. *Psychological Bulletin*. 2021 年. 被引272 次. 样本量65,605 人.
<https://consensus.app/papers/details/99806beb675e5802956908c3033e6817/>

10

Zhu Y. 等. 小学儿童抑制控制与数学能力：预注册元分析. *Educational Psychology Review*. 2024 年. 样本量14,223 人.
<https://consensus.app/papers/details/a5700b63ef2556ad96a0a918e08c403a/>

11

Emslander V. 等. 学前儿童执行功能与数学智力的关系. *Psychological Bulletin*. 2022 年. 样本量30,481 人.
<https://consensus.app/papers/details/dbcf21a23f7e5eb6876f8077fa65d8fe/>

12

Obersteiner A. 等. 数学专家在分数比较中的自然数偏差与量级表征. *Learning and Instruction*. 2013 年. 被引192 次.
<https://consensus.app/papers/details/76528abe8c1c55fab48b4840d364ff15/>

13

Vanluydt E. 等. 关系偏好在6 – 7 岁儿童应用题解决中的作用. *Educational Studies in Mathematics*. 2022 年. 样本量 343 人.
<https://consensus.app/papers/details/294e114037a8596c9caac8525059fd17/>

14

de Koning B. B. 等. 应用题解决中的一致性效应可通过语言指导有效降低. *Contemporary Educational Psychology*. 2017 年.
<https://consensus.app/papers/details/4d48588786c353a7a976c2899acc09b3/>

15

van der Schoot M. 等. 一致性效应在不成功而非成功解题者中依赖于标记反转：眼动研究. *Contemporary Educational Psychology*. 2008 年. 被引70 次.
<https://consensus.app/papers/details/655269eb038f59dc8e2a1563c277eaea/>

16

Fresnoza S. 等. 探查我们的内置计算器：算术运算相关脑区的无创脑刺激研究系统综述. *eNeuro*. 2024 年.
<https://consensus.app/papers/details/d76ffeb4faa4576da3487227e4101284/>

17

De Smedt B. 算术事实提取的个体差异. 2015 年.
<https://consensus.app/papers/details/14904307768a5bd7b4ed2cdbed7cb7e5/>

18

Xu C. 等. 二至三年级儿童算术流畅性发展的个体差异. *Developmental Psychology*. 2021 年. 样本量244 人, 纵向追踪.
<https://consensus.app/papers/details/757ddd887b9c513081b314687256832b/>

19

Bellon E. 等. 儿童算术事实提取的个体差异与抑制相关吗? . *Frontiers in Psychology*. 2016 年.
<https://consensus.app/papers/details/b3fe39c4e61a516a8835c6c69e749760/>

20

Bailey D. H. 等. 分数能力预测数学成绩的增长. *Journal of Experimental Child Psychology*. 2012 年. 被引248 次. 样本量212 人, 纵向追踪.
<https://consensus.app/papers/details/a90e0a6a0ff854ba81b29cbe735c4ef5/>

21

Schneider M. 等. 非符号与符号数量加工与数学能力的关系: 元分析. *Developmental Science*. 2017 年. 被引629 次. 样本量 17,201 人.
<https://consensus.app/papers/details/b7b9fa3f855f5177a8416c0a2242835a/>

22

Amland T. 等. 数学能力的认知因素: 系统综述与元分析. *Psychological Bulletin*. 2024 年. 269 项研究, 2,696 个相关.
<https://consensus.app/papers/details/d443284302c358d4b92375f72ca0f30a/>

23

Rittle-Johnson B., Alibali M. W. 数学概念理解与程序技能的发展: 一个迭代过程. *Journal of Educational Psychology*. 2001 年. 被引1,216 次.
<https://consensus.app/papers/details/12be9ac313f6577ca391a30864b51b6a/>

24

Rittle-Johnson B. 发展数学知识. *Child Development Perspectives*. 2017 年. 被引110 次.
<https://consensus.app/papers/details/ccdd87b807245996aaec817368f15ef4/>